

Stage Courbes Remplissantes

Paul REMY

Avril 2025



Abstract

The key subject of this document is space-filling curves, primarily on Hilbert space-filling curve, the construction of a triangular space-filling curve, and the construction of a marble run that follows iteration of Hilbert space-filling curve. This work was completed as part of an internship at LORIA.

Remerciements

Tout d'abord, j'aimerais remercier Mme Malaga et M. Pouget, enseignants-chercheurs au Loria, de m'avoir accompagné tout le long de mon stage et de m'avoir ouvert la porte du monde de la recherche et de la médiation scientifique. Je remercie également M. Megy, responsable de la licence L3 Mathématiques, pour son aide tout au long de l'année de L3 et ses bons conseils. Je remercie également Dorian PERROT, doctorant dans l'équipe GAMBLE du LORIA, m'ayant été d'une grande aide pour la courbe du triangle. Finalement, je remercie ma famille et mes amis qui m'ont aidé et soutenu pendant toute la durée de mon stage.

Contents

1	Introduction	4
2	Courbe de Hilbert	4
2.1	Définition et propriétés	4
2.2	Construction d'un toboggan de Hilbert	9
3	Courbe remplissant le triangle	12
4	Médiation scientifique	14
5	Conclusion	15
5.1	Ressenti	15
5.2	Ouverture	15

1 Introduction

Les courbes remplissantes sont une curiosité mathématique relativement récente. En effet, avant que George Cantor ne prenne le monde par surprise avec sa démonstration d'une bijection entre $[0, 1[$ et un espace de dimension $n \geq 2$ [1], il paraissait tout à fait impossible de pouvoir paramétrer un espace de dimension $n \geq 2$ avec un seul paramètre. C'est pour cela que, peu après la démonstration de George Cantor, de nombreux mathématiciens, tels que Giuseppe Peano et David Hilbert, se mettent à la recherche de ces courbes pouvant remplir un espace. Ils finirent par publier chacun un article, respectivement en 1890 [5] et 1891 [2], décrivant deux courbes remplissantes allant de l'intervalle $[0, 1]$ dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Définition 1.1. Dans le contexte de ce rapport de stage, on appelle courbe remplissante une fonction

$$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

telle que f est continue et surjective de I dans U où U est borné, $\lambda(\partial U) = 0$ et $\lambda(U) > 0$ ou λ est la mesure de Lebesgue.

Dans la suite de ce document, nous allons étudier la courbe remplissante de Hilbert, ainsi que construire une courbe remplissant un triangle.

2 Courbe de Hilbert

2.1 Définition et propriétés

Dans cette partie, nous allons construire et démontrer que la courbe de Hilbert est bien définie et est une courbe remplissante. Pour cela, nous allons d'abord construire de manière itérative les différentes étapes de la courbe de Hilbert. Pour construire chaque itération, nous allons utiliser trois fonctions de base comme "briques élémentaires".

Définition 2.1. On pose :

$$\begin{aligned} A_0 : [0, 1[&\rightarrow [0, 1]^2, t \mapsto \left(t, \frac{1}{2}\right) \\ P_0 : [0, 1[&\rightarrow [0, 1]^2, t \mapsto \left(\frac{1}{2}, t\right) \mathbb{1}_{t \in [0, \frac{1}{2}[} + \left(t, \frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} \\ Q_0 : [0, 1[&\rightarrow [0, 1]^2, t \mapsto \left(t, \frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{t \in [0, \frac{1}{2}[} + \left(\frac{1}{2}, 1 - t\right) \mathbb{1}_{t \in [\frac{1}{2}, 1]}. \end{aligned}$$

On note T_1, T_2, T_3 les translations des vecteurs respectifs $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$, r_+, r_- les rotations de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ et h une homotétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose aussi la notation suivante pour les intervalles d'entiers $\llbracket 0, n \rrbracket := \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

On définit alors par récurrence les suites de fonctions $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec les formules suivantes :

Définition 2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose:

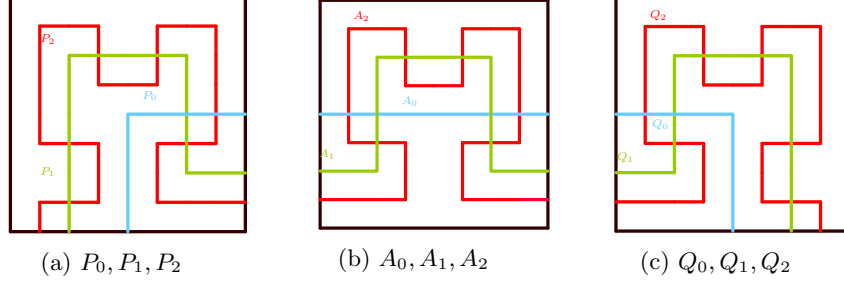
$$\begin{aligned} A_{n+1}(t) = & h \circ r_- \circ Q_n(1-4t)\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}[}(t) + T_1 \circ h \circ P_n(4t-1)\mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[}(t) \\ & + T_2 \circ h \circ Q_n(4t-2)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[}(t) \\ & + T_3 \circ h \circ r_+ \circ P_n(4-4t)\mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) = & h \circ r_- \circ A_n(1-4t)\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}[}(t) + T_1 \circ h \circ P_n(4t-1)\mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[}(t) \\ & + T_2 \circ h \circ Q_n(4t-2)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[}(t) \\ & + T_3 \circ h \circ r_+ \circ P_n(4-4t)\mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(t) = & h \circ r_- \circ Q_n(1-4t)\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}[}(t) + T_1 \circ h \circ P_n(4t-1)\mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[}(t) \\ & + T_2 \circ h \circ Q_n(4t-2)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[}(t) \\ & + T_3 \circ h \circ r_+ \circ A_n(4-4t)\mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}(t) \end{aligned}$$

Rq : $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n, P_n, Q_n sont continues.

Voici en image la construction des trois premières itérations de chaque courbe :



Dans la suite, on notera

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket, I_{n,k} = \left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n} \right[$$

les ensembles d'une partition de $[0, 1[= \bigsqcup_{k=0}^{4^n-1} I_{n,k}$.

Nous construirons une suite $C_{n,k}$ de petit carrés de largeur $\frac{1}{2^n}$ formant une partition de $[0, 1]^2$:

$$[0, 1]^2 = \bigsqcup_{i=0}^{2^n-1} \bigsqcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right[\times \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right[$$

Lemme 2.3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, \forall k \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket, \exists ! C_{n,k}$ un petit carrée de largeur $\frac{1}{2^n} tq$

$$\begin{aligned} A_m(I_{n,k}) &\subset C_{n,k} \\ P_m(I_{n,k}) &\subset C_{n,k} \\ Q_m(I_{n,k}) &\subset C_{n,k} \end{aligned} \tag{2}$$

Ce lemme nous donne une relation biunivoque entre la partition des $I_{n,k}$ et la partition de $[0, 1]^2$ des $C_{n,k}$.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème par récurrence, posons :

$$\begin{aligned} H_n : \forall m \geq n, \forall k \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket, \exists ! C_{n,k} \\ A_m(I_{n,k}) &\subset C_{n,k} \\ P_m(I_{n,k}) &\subset C_{n,k} \\ Q_m(I_{n,k}) &\subset C_{n,k} \end{aligned}$$

Pour $n=0$, on a bien par définition des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ H_0 vérifiée avec $C_{0,0} = [0, 1]^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vrai, soit $m \geq n$, et soit $k \in \llbracket 0, 4^{n+1} - 1 \rrbracket$. Nous allons maintenant étudier $A_{m+1}(I_{n+1,k}), P_{m+1}(I_{n+1,k}), Q_{m+1}(I_{n+1,k})$.

D'après les formules (1), on distinguera 4 cas :

$k \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket, k \in \llbracket 4^n, 2 \times 4^n - 1 \rrbracket, k \in \llbracket 2 \times 4^n, 3 \times 4^n - 1 \rrbracket, k \in \llbracket 3 \times 4^n, 4 \times 4^{n+1} - 1 \rrbracket$, pour que les $I_{n+1,k}$ soient inclus respectivement dans $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$. Les $I_{n,k}$ sont nécessairement inclus dans un de ces quatre intervalles.

Si $k \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$, on pose $k' = 4^n - k - 1 \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$ et on a d'après la formule de récurrence (1) :

$$\begin{aligned} A_{m+1}(I_{n+1,k}) &= h(r_-(Q_m(I_{n,k'}))) \\ P_{m+1}(I_{n+1,k}) &= h(r_-(A_m(I_{n,k'}))) \\ Q_{m+1}(I_{n+1,k}) &= h(r_-(P_m(I_{n,k'}))) \end{aligned}$$

or $k' = 4^n - k + 1 \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$ donc, d'après, H_n il existe un unique $C_{n,k'}$ tel que :

$$\begin{aligned} A_m(I_{n,k'}) &\subset C_{n,k'} \\ P_m(I_{n,k'}) &\subset C_{n,k'} \\ Q_m(I_{n,k'}) &\subset C_{n,k'} \end{aligned}$$

On pose alors $C_{n+1,k} = h(r_-(C_{nk'}))$, on a donc

$$\begin{aligned} A_{m+1}(I_{n+1,k}) &\subset C_{n+1,k} \\ P_{m+1}(I_{n+1,k}) &\subset C_{n+1,k} \\ Q_{m+1}(I_{n+1,k}) &\subset C_{n+1,k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pour $k \in \llbracket 4^n, 2 \times 4^n - 1 \rrbracket$, on pose $k' = k - 4^n \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$:

$$A_{m+1}(I_{n+1,k}) = T_2(h(Q_m(I_{n,k'}))) = P_{m+1}(I_{n+1,k}) = Q_{m+1}(I_{n+1,k})$$

D'après H_n il existe un unique $C_{n,k'}$ vérifiant les relations d'inclusion, on pose alors $C_{n+1,k} = T_1(h(C_{n,k'}))$ et on a donc bien (3).

Pour $k \in \llbracket 2 \times 4^n, 3 \times 4^n - 1 \rrbracket$, on pose $k' = k - 2 \times 4^n \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} A_{m+1}(I_{n+1,k}) &= T_3(h(P_m(I_{n,k'}))) \\ &= P_{m+1}(I_{n+1,k}) = Q_{m+1}(I_{n+1,k}) \end{aligned}$$

D'après H_n , il existe un unique $C_{n,k'}$ vérifiant les relations d'inclusion, on pose alors $C_{n+1,k} = T_2(h(C_{n,k'}))$, on a donc bien (3).

Enfin pour $k \in \llbracket 3 \times 4^n, 4 \times 4^n - 1 \rrbracket$, on pose $k' = 4^{n+1} - k - 1 \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} A_{m+1}(I_{n+1,k}) &= T_3(h(r_+(P_n(I_{n,k'})))) = P_{m+1}(I_{n+1,k}) \\ Q_{m+1}(I_{n+1,k}) &= T_3(h(r_+(A_n(I_{n,k'})))) \end{aligned}$$

D'après H_n , il existe un unique $C_{n,k'}$ vérifiant les relations d'inclusion, on pose alors $C_{n+1,k} = T_3(h(r_+(C_{n,k'})))$, on a donc bien (3). On a donc par construction les $C_{n+1,k}$ uniques. La récurrence est initialisée et l'hérédité est prouvée, donc d'après le principe de récurrence le lemme est vérifié. $\square$

Lemme 2.4. Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, k_n \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n,k_n} \supset I_{n+1,k_{n+1}} \iff \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1,k_{n+1}} \subset C_{n,k_n}$

Démonstration. Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, k_n \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$ et $I_{n,k_n} \supset I_{n+1,k_{n+1}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\forall m \geq n, A_m(I_{n+1,k_{n+1}}) \subset A_m(I_{n,k_n}) \subset C_{n,k_n}$ et $A_m(I_{n+1,k_{n+1}}) \subset C_{n+1,k_{n+1}}$. Or $C_{n,k} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ ou C_i est un carré de la partition de $[0, 1]^2$ en 4^{n+1} carrés de taille $\frac{1}{2^{n+1}}$. Or $C_{n+1,k_{n+1}}$ est aussi un carré de cette partition, donc comme $C_{n+1,k_{n+1}}$ est l'unique carré vérifiant les propriétés d'inclusion alors il existe $i_0 \in [1, 4]$ tq $C_{n+1,k_{n+1}} = C_{i_0} \subset C_{n,k_n}$.

Maintenant, soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, k_n \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$ et $C_{n,k_n} \supset C_{n+1,k_{n+1}}$ on a $I_{n,k_n}, I_{n+1,k_{n+1}}$ tels que $\forall m \geq n+1, A_m(I_{n,k_n}) \subset C_{n,k_n}, A_{m+1}(I_{n+1,k_{n+1}}) \subset C_{n+1,k_{n+1}} \subset C_{n,k_n}$. Supposons par l'absurde que $I_{n+1,k_{n+1}} \not\subset I_{n,k_n}$. Alors, avec ce que l'on a démontré avant $C_{n+1,k_{n+1}} \not\subset C_{n,k_n}$ est absurde par hypothèse. $\square$

Définition 2.5 (Écriture quaternaire). $\forall t \in [0, 1[\exists (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ tel que $t = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} d_i$.

Lemme 2.6. $\forall t \in [0, 1[\exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, k_n \in [0, 4^n - 1]$ et $t \in I_{n, k_n}$.

Démonstration. Si $t \in [0, 1[$, alors $\exists (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ tel que $t = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} d_i$ et on a $4^n t = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{n-i} d_i$

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} d_i$$

$$4^n t = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{n-i} d_i = \sum_{i=1}^n 4^{n-i} d_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} 4^{n-i} d_i$$

On pose $k_n = \sum_{i=1}^n 4^{n-i} d_i = (d_1 d_2 \dots d_n)_4 < (1 \underbrace{0 \dots 0}_n)_4 = 4^n$. De plus $\sum_{i=n+1}^{\infty} 4^{n-i} d_i = (0, 0 d_1 d_2 d_3 \dots)_4 \leq (0, 1)_4 = \frac{1}{4} < 1$ donc $4^n t \in [k_n, k_n + 1[$ donc $t \in I_{n, k_n}$. $\square$

Propriété 2.7 (Courbe de Hilbert). $\forall t \in [0, 1[$ on pose $\mathcal{H}(t) = (x_t, y_t)$ où $\{(x_t, y_t)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C_{n, k_n}}$.

Démonstration. $\mathcal{H}$ est bien définie car soit $t \in [0, 1[$ alors $\exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, t \in \overline{I_{n, k_n}}$ on y associe $(\overline{C_{n, k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$. les suites $(\overline{I_{n, k_n}})_{n \in \mathbb{N}}, (\overline{C_{n, k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'ensembles fermés emboîtés dont le diamètre tend vers 0. Donc d'après le théorème des fermés emboîtés $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C_{n, k_n}} = \{(x_t, y_t)\}$ et $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I_{n, k_n}} = \{t\}$. $\square$

Propriété 2.8. $\mathcal{H}$ est une fonction continue et surjective de $[0, 1[$ dans $[0, 1]^2$ donc est une courbe remplissantes de $[0, 1]^2$.

Démonstration. Continuité :

Soit $\epsilon > 0$ soit $n \in \mathbb{N}, \epsilon > \frac{\sqrt{2}}{4^n}$ soit t_1, t_2 tq $|t_1 - t_2| < \frac{1}{4^{n+1}}$ et donc $\exists k \in [0, 4^n - 1]$ tq $t_1, t_2 \in I_{n, k}$ On a donc par définition de $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}(t_1), \mathcal{H}(t_2) \in C_{n, k}$ donc $\|\mathcal{H}(t_1) - \mathcal{H}(t_2)\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{4^n} < \epsilon$.

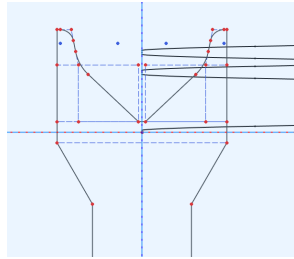
Surjectivité:

Soit $(x, y) \in [0, 1]^2 \exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\{(x, y)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C_{n, k_n}}$ a $(\overline{C_{n, k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ on associe la suite $(\overline{I_{n, k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ et on construit $\{t_{(x, y)}\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I_{n, k_n}}$ on a donc par définition de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}(t_{(x, y)}) = (x, y)$. $\square$

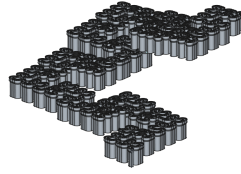
Cette fonction ne peut pas être injective car, d'après le théorème de Netto [4], il n'existe aucune bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

2.2 Construction d'un toboggan de Hilbert

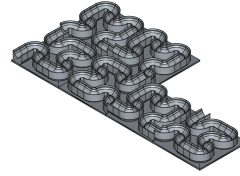
Un des objectifs de ce stage était la production d'objets concrets en lien avec les courbes remplissantes. C'est pour cela qu'au début de mon stage un de mes objectifs était de construire un toboggan de billes suivant les différentes itérations de la courbe de Hilbert. Pour faire cela, il me fallait déjà comprendre ce qu'était la courbe de Hilbert et de quelle manière elle était construite. Dans la section précédente, nous avons vu que la construction des approximations de la courbe de Hilbert sont créées par récurrence. A chaque étape, nous utilisons trois types de pièces différentes, l'idée fût alors de construire des modules de base compatible Lego imprimable nous permettant de construire un toboggan aussi grand que voulu, sous couvert d'avoir assez de Lego et de modules. Pour construire un toboggan à partir des pièces, il nous faut une information en plus, le sens de parcours. C'est pour cela que dans cette partie nous nommerons les pièces du toboggan $\overrightarrow{A_n}, \overleftarrow{A_n}, \overrightarrow{P_n}, \overleftarrow{P_n}, \overrightarrow{Q_n}, \overleftarrow{Q_n}$. Contrairement à précédemment ce ne seront plus des fonctions mathématiques, mais des objets physiques. J'ai tout d'abord conçu sur FreeCAD, un logiciel libre de conception assisté par ordinateur, les toboggans $\overrightarrow{A_2}, \overleftarrow{A_2}, \overrightarrow{P_2}, \overleftarrow{P_2}, \overrightarrow{Q_2}, \overleftarrow{Q_2}$. Pour cela j'ai utilisé une des macros conçues par la communauté FreeCAD permettant de tracer les différentes itérations de la courbe de Hilbert, je l'ai modifié pour y ajouter une pente et j'ai lissé la courbe. Ensuite j'ai construit une esquisse du toboggan en utilisant la fonction balayage de FreeCAD en suivant la cinquième itération de la courbe de Hilbert, nous verrons pourquoi dans les calculs suivants. De ce toboggan j'ai extrait les différentes pièces $\overrightarrow{A_2}, \overleftarrow{A_2}, \overrightarrow{P_2}, \overleftarrow{P_2}, \overrightarrow{Q_2}, \overleftarrow{Q_2}$. Lors de la construction, les contraintes étaient les suivantes : la pente de chaque module devait être compatible avec les hauteurs de pièce Lego, la largeur d'un module devait être compatible avec les plaques en Lego. J'ai alors fixé la largeur des modules à 128mm (dimension d'une plaque Lego 16x16) et la pente de 9,6mm par module (hauteur d'une brique Lego standard). Après avoir conçu le corps de chaque module, je fixais en dessous une plaque Lego 16x16. Ensuite il ne restait plus qu'à imprimer les modules. Pour cela, Marc Pouget utilisa les imprimantes 3D du Creativ'lab au Loria.



(a) Sketch toboggan



(b) cinquième iteration



(c) modules

Après avoir imprimé quelques modules, une question me vint en tête, combien de modules sont nécessaire pour construire les $\overrightarrow{A_n}, \overleftarrow{A_n}, \overrightarrow{P_n}, \overleftarrow{P_n}, \overrightarrow{Q_n}, \overleftarrow{Q_n}$ avec $n \geq 3$.

Pour cela il fallait déjà modifier les formules que nous avons utilisées dans la section précédente. On obtient alors

Définition 2.9. $\forall n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_{n+1}} &= \overrightarrow{P_n} \quad \overrightarrow{Q_n} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad \overrightarrow{Q_n} \quad \overrightarrow{P_n} \\
\overleftarrow{A_{n+1}} &= \overleftarrow{P_n} \quad \overleftarrow{Q_n} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad \overleftarrow{Q_n} \quad \overleftarrow{P_n} \\
\overrightarrow{P_{n+1}} &= \overrightarrow{P_n} \quad \overrightarrow{Q_n} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad \overrightarrow{Q_n} \quad \overrightarrow{P_n} \\
\overleftarrow{P_{n+1}} &= \overleftarrow{P_n} \quad \overleftarrow{Q_n} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad \overleftarrow{Q_n} \quad \overleftarrow{P_n} \\
\overrightarrow{Q_{n+1}} &= \overrightarrow{P_n} \quad \overrightarrow{Q_n} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad \overrightarrow{Q_n} \quad \overrightarrow{P_n} \\
\overleftarrow{Q_{n+1}} &= \overleftarrow{P_n} \quad \overleftarrow{Q_n} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad \overleftarrow{Q_n} \quad \overleftarrow{P_n}
\end{aligned} \tag{4}$$

Pour ce qui est du compte des pièces nous allons négliger les rotations. On peut de plus remarquer que pour passer d'un sens à un autre il suffit d'échanger le sens de toutes les flèches. Grâce aux formules de récurrence (4) on obtient:

Lemme 2.10.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 3 \\
\overrightarrow{A_{n+2}} - \overrightarrow{P_{n+2}} &= \overleftarrow{Q_{n+1}} - \overleftarrow{A_{n+1}} = \overrightarrow{A_n} - \overrightarrow{P_n} \\
\overrightarrow{P_{n+2}} - \overrightarrow{Q_{n+2}} &= \overleftarrow{P_{n+1}} - \overleftarrow{Q_{n+1}} = \overrightarrow{P_n} - \overrightarrow{Q_n} \\
\overrightarrow{A_{n+2}} - \overrightarrow{Q_{n+2}} &= \overleftarrow{P_{n+1}} - \overleftarrow{A_{n+1}} = \overrightarrow{A_n} - \overrightarrow{Q_n}
\end{aligned}$$

De ces formules on déduit :

Lemme 2.11. $\forall n \geq 3$ on a :

$$\overrightarrow{A_n} - \overrightarrow{P_n} = \begin{cases} \overrightarrow{A_2} - \overrightarrow{P_2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \overleftarrow{Q_2} - \overleftarrow{A_2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_n} - \overrightarrow{Q_n} = \begin{cases} \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{Q_2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \overleftarrow{P_2} - \overleftarrow{Q_2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_n} - \overrightarrow{Q_n} = \begin{cases} \overrightarrow{A_2} - \overrightarrow{Q_2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \overleftarrow{P_2} - \overleftarrow{A_2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Grâce à ce lemme, on remarque que la différence en nombre de modules A_2, P_2, Q_2 nécessaires pour construire un $\overrightarrow{A_n}, \overrightarrow{P_n}$ ou $\overrightarrow{Q_n}$ n'est que d'un module. C'est pour ça que maintenant nous allons compter le nombre de modules nécessaires pour construire un $\overrightarrow{A_n}$ avec $n \geq 3$. Avec le lemme précédent et le fait que $\overleftarrow{A_n}$ et $\overrightarrow{A_n}$ sont composés des mêmes modules, on obtient :

Théorème 2.12. $\forall n \geq 3$

$$\overrightarrow{A_n} = \begin{cases} 4\overrightarrow{A_{n-1}} + (\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_2}) + (\overrightarrow{Q_2} + \overleftarrow{Q_2}) - 2(\overrightarrow{A_2} + \overleftarrow{A_2}), & \text{si } n \text{ pair,} \\ 4\overrightarrow{A_{n-1}} - (\overrightarrow{P_2} + \overleftarrow{P_2}) - (\overrightarrow{Q_2} + \overleftarrow{Q_2}) + 2(\overrightarrow{A_2} + \overleftarrow{A_2}), & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n \geq 3$ si n pair on a d'après le lemme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_n} &= \overrightarrow{A_n} + \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{A_2} \\ \overrightarrow{Q_n} &= \overrightarrow{A_n} + \overrightarrow{Q_2} - \overrightarrow{A_2} \end{aligned}$$

et avec la formule

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_n} &= \overleftarrow{P_{n-1}} + \overrightarrow{P_{n-1}} + \overleftarrow{Q_{n-1}} + \overrightarrow{Q_{n-1}} \\ &= 4\overrightarrow{A_{n-1}} + (\overrightarrow{P_2} + \overleftarrow{P_2}) + (\overrightarrow{Q_2} + \overleftarrow{Q_2}) - 2(\overrightarrow{A_2} + \overleftarrow{A_2}). \end{aligned}$$

Si n impair :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_n} &= \overrightarrow{A_n} + \overrightarrow{A_2} - \overrightarrow{Q_2} \\ \overrightarrow{Q_n} &= \overrightarrow{A_n} + \overrightarrow{A_2} - \overrightarrow{P_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et donc : } \overrightarrow{A_n} &= \overleftarrow{P_{n-1}} + \overrightarrow{P_{n-1}} + \overleftarrow{Q_{n-1}} + \overrightarrow{Q_{n-1}} \\ &= 4\overrightarrow{A_{n-1}} - (\overrightarrow{P_2} + \overleftarrow{P_2}) - (\overrightarrow{Q_2} + \overleftarrow{Q_2}) + 2(\overrightarrow{A_2} + \overleftarrow{A_2}). \end{aligned}$$

□

Avec cette relation de récurrence on peut en déduire des suites $(a_n)_{n \geq 3}, (p_n)_{n \geq 3}$ donnant le nombre de A_2 de chaque sens pour construire un A_n et p_n donnant

le nombre de P_2 et Q_2 de chaque sens pour construire un A_n .

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_n = 4a_{n-1} + 2(-1)^{n+1} \end{cases} \begin{cases} p_3 = 1 \\ p_n = 4p_{n-1} + (-1)^n \end{cases}$$

Propriété 2.13. *On a $\forall n \geq 3$,*

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k 4^{n-4-k} \\ p_n &= 4^{n-3} + \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^{k+1} 4^{n-4-k} \end{aligned} \tag{5}$$

3 Courbe remplissant le triangle

Dans cette partie nous allons construire par récurrence une courbe remplissante du triangle équilatéral de côté 1. Cette construction est inspiré d'un article d'Ideophelius sur Word Press Reference [3].

Pour cela nous posons

$$\Delta_0 : [0, 1[\rightarrow T, t \mapsto (0, t)$$

De plus, on pose r_θ les rotations d'angle θ . On pose aussi $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ les translations de vecteur respectif $(-1, 0)$; $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $(\frac{1}{4}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ et h une homotétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{2}$. On réutilisera aussi la définition des $I_{n,k}$ de la section 2 :

Définition 3.1. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= h \circ r_{\frac{5\pi}{3}} \circ \tau_0 \circ \Delta_n (1 - 4t) \mathbb{1}_{t \in I_{1,0}} \\ &\quad + h \circ \tau_1 \circ \Delta_n (4t - 1) \mathbb{1}_{t \in I_{1,1}} \\ &\quad + h \circ r_{\frac{\pi}{3}} \circ \tau_2 \circ \Delta_n (3 - 4t) \mathbb{1}_{t \in I_{1,2}} \\ &\quad + h \circ \tau_3 \circ \Delta_n (4t - 3) \mathbb{1}_{t \in I_{1,3}} \end{aligned} \tag{6}$$

Ensuite, comme pour la courbe de Hilbert, nous voulons associer les $I_{n,k}$ avec les éléments de la partition de T en 4^n triangles de côté $\frac{1}{2^n}$. Pour cela, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [0, 4^{n-1}[$, $\exists T_{n,k}$ de tel sorte que

$$\forall m \geq n, \Delta_m(I_{n,k}) \subset T_{n,k} \tag{7}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n : \forall k \in [0, 4^{n-1}[, \exists ! T_{n,k}, \forall m \geq n, \Delta_m(I_{n,k}) \subset T_{n,k}$$

Pour $n = 0$, on pose $T_{0,0} = T$ et on a $I_{0,0} = [0, 1[$ (donc bien $\forall m \in \mathbb{N}$ $\Delta_m(I_{0,0}) \subset T_{0,0} = T$). Donc H_0 est vérifiée.

Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $m \geq n$. Supposons H_n vrai, soit $k \in [0, 4^{n+1}]$ on a, comme pour la courbe de Hilbert, quatre cas à regarder: $k \in [0, 4^n - 1]$, $k \in [4^n, 2 \times 4^n - 1]$, $k \in [2 \times 4^n, 3 \times 4^n - 1]$, $k \in [3 \times 4^n, 4 \times 4^{n+1} - 1]$. Si $k \in [0, 4^n - 1]$, on pose $k' = 4^n - k - 1 \in [0, 4^n - 1]$ et on a d'après la formule de récurrence (6) :

$$\Delta_{m+1}(I_{n+1,k}) = h(r_{\frac{5\pi}{3}}(\tau_0(\Delta_m(I_{n,k'}))))$$

Or, $k' = 4^n - k - 1 \in [0, 4^n - 1]$ donc, d'après, H_n il existe un $T_{n,k'}$ tel que $\Delta_m(I_{n,k'}) \subset T_{n,k'}$. On pose alors $T_{n+1,k} = h(r_{\frac{5\pi}{3}}(\tau_0(T_{n,k'})))$, on a donc $T_{n+1,k}$ un triangle de largeur $\frac{1}{2^n}$

$$\Delta_{m+1}(I_{n+1,k}) \subset T_{n+1,k}. \quad (8)$$

Pour $k \in [4^n, 2 \times 4^n - 1]$, on pose $k' = k - 4^n \in [0, 4^n - 1]$. D'après H_n , il existe un unique $T_{n,k'}$ vérifiant la relation d'inclusion, on pose alors $T_{n+1,k} =$ et on a donc bien (8).

Pour $k \in [2 \times 4^n, 3 \times 4^n - 1]$, on pose $k' = 3 \times 4^n - k - 1 \in [0, 4^n - 1]$:

$$\Delta_{n+1}(I_{n+1,k}) = h(\tau_1(\Delta_n(I_{n,k'})))$$

D'après H_n , il existe un unique $T_{n,k'}$ vérifiant les relation d'inclusion, on pose alors $T_{n+1,k} = h(\tau_1(T_{n,k'}))$, on a donc bien (8).

Enfin pour $k \in [3 \times 4^n, 4 \times 4^{n+1} - 1]$, on pose $k' = k - 3 \times 4^n \in [0, 4^n - 1]$

$$\Delta_{n+1}(I_{n+1,k}) = h(\tau_3(\Delta_n(I_{n,k'})))$$

d'après H_n il existe un unique $T_{n,k'}$ vérifiant les relations d'inclusion, on pose alors $T_{n+1,k} = h(\tau_3(T_{n,k'}))$, on a donc bien (8). On a donc par construction les $T_{n+1,k}$ uniques. La récurrence est initialisée et l'hérédité est prouvée, donc d'après le principe de récurrence le lemme est vérifié. $\square$

Lemme 3.3. Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, k_n \in [0, 4^n - 1]$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n,k_n} \supset I_{n+1,k_{n+1}} \iff \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1,k_{n+1}} \subset T_{n,k_n}$

Démonstration. Voir démonstration du lemme (2.4). □

Théorème 3.4 (Courbe du triangle). $\forall t \in I$ on pose $\Delta(t) = (x_t, y_t)$ où $(x_t, y_t) = \bigcap \overline{T_{n,k_n}} (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans le lemme (2.6), Δ est continue et surjective de $[0, 1[$ dans T .

Démonstration. Continuité :

Soit $\epsilon > 0$, soit $n \in N$ tel que $\epsilon > \frac{1}{2^n}$ soit t_1, t_2 tq $|t_1 - t_2| < \frac{1}{4^{n+1}}$, alors $\exists k \in \llbracket 0, 4^n - 1 \rrbracket$ tel que $t_1, t_2 \in I_{n,k}$, par définition de Δ , $\Delta(t_1), \Delta(t_2) \in T_{n,k}$ et donc $\|\Delta(t_1) - \Delta(t_2)\| \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Surjectivité:

Soit $(x, y) \in T, \exists (k_n \in N)$ tel que $\{(x, y)\} = \bigcap \overline{T_{n,k_n}}$, on y associe la suite I_{n,k_n} , on pose $\{t_{(x,y)}\} = \bigcap \overline{I_{n,k_n}}$ et par définition de Δ on a $\Delta(t_{(x,y)}) = (x, y)$. □

4 Médiation scientifique

Pendant ce stage, j'ai eu la chance de participer au festival printemps des mathématiques au lycée Rosa Parks à Thionville. J'y suis allé dans le cadre de mon stage pour faire une animation sur les courbes remplies, en utilisant le toboggan de Hilbert comme pièce maitresse. En compagnie de Mme Alba MÁLAGA, enseignante chercheuse au LORIA, et M. Dorian PERROT, doctorant en mathématiques dans l'équipe GAMBLE du LORIA, nous avons passé la journée du 25 avril 2025 au lycée devant des classes de seconde. L'objectif de notre présentation était une introduction ludique à la construction de la courbe de Hilbert. Pour cela, nous avons apporté assez de modules du toboggan de Hilbert pour être capable de construire un toboggan de $1m \times 1m$. Durant toute la journée, nous avons fait cette animation devant trois classes de seconde et deux demi-classes. Pour l'animation, nous avons une heure avec les élèves. Nous commençons d'abord par une courte présentation de qui nous sommes, suivi d'une explication sur la construction. Après ces cinq minutes de présentation, nous passons dans les différents groupes en leur donnant les différentes pièces nécessaires pour construire des toboggans allant jusqu'à une quatrième itération de la courbe de Hilbert. Les élèves étaient pour la plupart très réceptifs à cette activité et arrivaient à construire au moins un toboggan avec 4 modules avant la fin de l'heure. Certains groupes arrivaient même à faire un toboggan avec 16 modules dans le temps imparti. Voici des images de la journée :



5 Conclusion

5.1 Ressenti

Ce stage m'a permis de travailler sur une partie des mathématiques que je n'avais jamais abordé. Mme. Malaga et M. Pouget ont été très accueillants avant même le début de mon stage, m'ayant offert l'opportunité de faire parti de plusieurs projets de médiation scientifique et de pouvoir participer, en juin, au salon Culture et Jeux Mathématiques et à une exposition au Palais de la Découverte.

5.2 Ouverture

À l'issue de ce stage, il me reste encore des questionnements sur les courbes remplissantes et leur construction.

- Est-il possible de construire des courbes remplissantes remplissant n'importe quel n -gone ?
- Existe-t-il des sous-espaces $U \subset \mathbb{R}^2$ tq $\lambda(U) > 0$ et $\lambda(\partial U) = 0$ ne pouvant pas être rempli par une courbe remplissante ?
- Quelles sont les conditions minimales sur un sous-espace $U \in \mathbb{R}^n$ pour que l'on puisse construire une courbe "remplissant" cet espace ?

Références

- [1] G. Cantor. “Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre”. In: *De Gruyter* (1878). DOI: doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413.
- [2] D. Hilbert. “D. Ueber die stetige Abbildung einer Line auf ein Flächenstück”. In: *Math. Ann.* 38 (1890), pp. 157–160. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01199438>.
- [3] ideophilus. *A triangular space-filling curve*. URL: <https://ideophilus.wordpress.com/2012/09/06/a-triangular-space-filling-curve/>.
- [4] E. Netto. “Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.” In: *De Gruyter* 86 (1879). DOI: doi.org/10.1515/crll.1879.86.263.
- [5] G. Peano. “Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane”. In: *Math. Ann.* 36 (1891), pp. 459–460. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01199431>.